

基于固定时间扰动观测器的四足机器人 非奇异滑模跟踪控制

蒋思美^{1,2,3}, 贝俊贤^{1,2,3}, 刘勇华^{1,2,3}, 苏春翌^{1,2,3}, 鲁仁全^{1,2,3}

¹ 广东工业大学自动化学院, 广州 510006

² 智能决策与协同控制粤港联合实验室, 广州 510006

³ 广东省智能决策与协同控制重点实验室, 广州 510006

摘要: 四足机器人在消防救援、军事侦查等具有挑战性的复杂场景中展现出了巨大的应用潜力。然而, 在其运动过程中, 未建模耦合效应、变化的有效载荷和参数不匹配等不确定因素会显著降低系统的整体性能。针对未知扰动条件下四足机器人的运动控制问题, 本文构建了一种基于固定时间扰动观测器的非奇异滑模跟踪控制策略。首先, 采用单刚体模型对四足机器人进行动力学建模。在此基础上, 设计固定时间扰动观测器对机器人平动与转动方向的未知扰动进行快速估计。其次, 考虑四足机器人足端力的摩擦锥约束, 借助二次规划方法, 求解出最优的足端力。为验证所提策略的有效性, 以宇树四足机器人GO1为实验对象, 开展了仿真与实机测试。实验结果表明, 与 L_1 自适应控制和基线控制策略相比, 本文所提控制策略能够高效补偿未知扰动, 显著提升机器人位置与姿态轨迹跟踪精度。

关键词: 四足机器人; 固定时间扰动观测器; 非奇异滑模控制; 扰动; 跟踪控制

中图分类号: TP242

Fixed-time disturbance observer-based non-singular sliding mode tracking control for quadruped robots

JIANG Si-Mei^{1,2,3}, BEI Jun-Xian^{1,2,3}, LIU Yong-Hua^{1,2,3}, SU Chun-Yi^{1,2,3},

LU Ren-Quan^{1,2,3}

¹ School of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006

² Guangdong-Hong Kong Joint Laboratory for Intelligent Decision and Collaborate Control,
Guangzhou 510006

³ Guangdong Province Key Laboratory of Intelligent Decision and Cooperative Control,
Guangzhou 510006

Abstract: Quadruped robots have shown significant potential in challenging and complex applications, such as fire rescue and military reconnaissance. However, during quadrupedal

基金项目: 国家自然科学基金(62173097, 62121004, U2013601), 广东省特支计划本土创新创业项目(2019BT02X353), 广东省基础与应用基础研究基金面上项目(2022A515011239)

作者简介: 蒋思美(2001-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向: 四足机器人运动控制。通信作者: 刘勇华(1986-), 男, 副教授, 主要研究方向: 非线性控制理论、机器人技术及应用。E-mail: yonghua.liu@outlook.com

locomotion, various uncertainties, such as unmodeled coupling effects, varying payloads, and parameter mismatches, can substantially degrade system performance. To address the locomotion control problem of quadruped robots under unknown disturbance, this paper presents a fixed-time disturbance observer-based non-singular sliding mode tracking control strategy. A single rigid-body model is initially used to describe the dynamics of the quadruped robot, followed by the design of fixed-time disturbance observers to quickly estimate unknown disturbance in both translation and rotation directions. Considering the friction cone constraints on the foot-end forces for quadruped robots, the optimal foot-end forces are determined using a quadratic programming approach. The effectiveness of the proposed strategy is validated through simulations and real-world experiments on the Unitree quadruped robot GO1. Experimental results demonstrate that, compared with the L_1 adaptive control and baseline control strategies, the proposed control strategy effectively compensates for unknown disturbance and significantly enhances the accuracy of the robot's position and attitude trajectory tracking.

Key words: quadruped robot; fixed-time disturbance observer; non-singular sliding mode control; Disturbance; trajectory tracking

0 引言

近年来, 足式机器人技术发展迅速, 在国内外学术界和工业界均引发广泛关注^[1, 2]. 作为一种仿生腿足式机器人, 四足机器人兼具安全性与稳定性^[3, 4], 在消防救援、军事侦察、医疗服务以及工业巡检等多个领域展现出了巨大的应用潜力. 文献[5]提出了一种基于Spot 四足机器人的自主消防方案, Spot 通过配备热像仪及灭火器, 可以自主检测、定位和扑灭小型火灾. 文献[6]研发了基于Alpha Dog的面向军事场景的足式小队支持系统(Legged Squad Support System, LS3), 集成立体视觉系统和激光雷达系统, 可以不受环境的约束跟随人类操作员, 能够在不同的地形和环境中作战. 文献[7, 8]介绍了一款可被救援人员控制的配备医疗设备的四足机器人A1 Rescue Tasks UPM Robot, 可以在灾后环境中检测、定位受害者, 并提供医疗设备救援服务. 文献[9, 10, 11]设计了一款具有环境感知能力的多功能四足机器人ANYmal, 由高精度执行器驱动, 专为石油、天然气平台等具有挑战性的环境中的特殊商业和工业运营服务. 为顺利执行这些任务, 四足机器人需具备在未建模耦合效应、变化的有效载荷和参数不匹配等各种不确定条件下精准跟踪预定轨迹的能力. 这些不确定性因素往往会对系统性能和可靠性造成显著影响. 若不采取有效措施对其进行补偿, 可能会严重降低四足机器人的整体性能, 甚至导致其无法正常稳定运动. 为此, 在未知扰动条件下, 如何确保机器人稳定、精准地跟踪预定轨迹, 已成为当下亟待攻克的关键问题.

为应对上述挑战, 文献[12]探讨了四足机器人实时运动规划与控制问题, 提出一种鲁棒分层控制算法, 保证了机器人在不同地形上的鲁棒性以及盲运动的有效性. 文献[13]提出了一种基于步态跟踪性能的结构化指定混合灵敏度 H_∞ 鲁棒控制器, 通过控制四足机器人腿部关节角度位

置,保证了模型动态或外部扰动等不确定因素下系统的稳定性.文献[14]利用基于归一化动量的坐标变换,提出了一种鲁棒反步控制方法,可以稳定欠驱动四足机器人并跟踪期望轨迹,在模型参数存在不确定性的情况下,仍能保持控制器的鲁棒性.然而,这些鲁棒控制方法存在一定局限性,其可能引入高频控制分量,进而激发未建模的高频动态,对系统整体性能产生负面影响.在此背景下,自适应控制与在线学习技术迅速成为研究热点.文献[15]提出了一种 L_1 自适应控制(L_1 Adaptive Control, L_1 AC)框架,将自适应控制纳入二次规划力控制中,提高了四足机器人承载负载的能力及系统的稳定性.文献[16]提出基于在线负载识别的四足机器人运动自适应控制算法,可在线估算并补偿负载引发的外部扰动,从而大幅提高了系统的轨迹跟踪精度.文献[17]设计了一种用于具有挑战性的自然环境中盲四足运动的控制器,通过在简单领域对控制器进行强化学习训练,在训练期间从未遇到过的环境下,控制器仍能保持鲁棒性.文献[18]提出了一个模仿学习系统,通过将样本有效的领域自适应技术纳入训练过程,使四足机器人能够通过模仿现实世界的动物来学习敏捷的运动技能,从而快速适应现实世界的部署.然而,尽管上述控制方法在复杂不确定环境中展现出较强的鲁棒性,提升自适应控制器在动态运动场景中的有效性,提高在线学习的收敛速度并降低高维数据带来的计算复杂度^[19],仍是亟待解决的关键技术难题.

近年来,基于扰动观测器的控制技术吸引了越来越多研究者的注意.不同于鲁棒控制或自适应控制技术,基于扰动观测器的控制属于主动抗扰动技术.该技术的核心步骤在于设计扰动观测器对受扰系统中扰动进行估计,并根据扰动的估计进行扰动前馈补偿设计,最终与消除偏差的反馈控制设计结合形成复合控制器.针对腿部受到外力扰动的四足机器人运动控制问题,文献[20]设计了一种动量观测器分别估计站立腿和摆动腿上的外力,并与全身控制器结合,有效提升了系统应对不确定性的能力.为了同时估计四足机器人重心与腿部的外力扰动,文献[21]分别提出了一种基于动量的角度观测器和基于加速度的平移观测器,提高了系统的稳定性.针对执行器发生故障时四足机器人的跟踪控制问题,文献[22]设计了一种基于滑模观测器的自适应力位置控制算法,直接估计时变执行器故障,提高了系统的鲁棒性.然而,上述扰动观测器的收敛时间是无限的,难以有效应对具有时间敏感性的任务.为了解决这个问题,文献[23]引入了固定时间稳定的概念,固定时间稳定性质提高了系统的收敛速度,克服对系统初始状态的依赖,这些优良特性在实际应用场景中极具价值.文献[24]提出了一种基于固定时间扰动观测器的液压腿机器人高性能足部轨迹跟踪控制方法,通过设计固定时间扰动观测器估计系统中不匹配的集总不确定性,并利用控制器进行补偿,有效提高了系统的轨迹跟踪控制性能.文献[25]设计了一种基于重腿机器人的固定时间反步控制器用于重构轨迹跟踪,控制器根据预测的故障时间确保固定时间收敛,从而实现精确的轨迹跟踪.

基于上述讨论,本文从实际工程角度出发,聚焦未知扰动环境下四足机器人的运动控制问题^[26, 27, 28],提出了一种基于固定时间扰动观测器的非奇异滑模跟踪控制(Fixed-Time Disturbance Observer-Based Non-Singular Sliding Mode Tracking Control, FTDO-NSMC)策略.基于固定时间扰动观测器,定义系统内外的不确定扰动为总扰动,设计相应的扰动观测器实时估计四足机器人运动过程中的总扰动,并将扰动估计值集成到非奇异滑模跟踪控制中,基于李雅普诺夫理论证明了系统的稳定性,与 L_1 AC^[15]和基线控制(Baseline Control, BC)策略^[29]进行对比实验.本文首次将基于固定时间扰动观测器的非奇异滑模跟踪控制策略成功应用于实际

四足机器人系统中, 并验证了该策略的有效性与优势, 这给四足机器人的抗扰问题带来了新的解决思路, 也扩展了该策略的应用范围.

本文章节安排如下:第1节给出了必要的前置知识及四足机器人动力学模型; 第2节设计了扰动观测器和控制器, 并证明收敛性; 第3节考虑四足机器人足端力的摩擦锥约束, 运用二次规划方法求解了最优足端力; 第4节展示了仿真及实机对比试验; 第5节对本文工作进行了总结.

1 问题陈述与前置知识

1.1 符号定义

1) 给定向量 $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, 定义如下符号运算: $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\mathbf{p}^T \mathbf{p}}$, $\mathbf{p} \odot \mathbf{q} = [p_1 q_1, p_2 q_2, \dots, p_n q_n]^T$, $\text{sgn}(\mathbf{p}) = [\text{sgn}(p_1), \text{sgn}(p_2), \dots, \text{sgn}(p_n)]^T$, $|\mathbf{p}| = [|p_1|, |p_2|, \dots, |p_n|]^T$, $\int_0^t \mathbf{p} d\tau = \left[\int_0^t p_1 d\tau, \int_0^t p_2 d\tau, \dots, \int_0^t p_n d\tau \right]^T$, $\mathbf{p}^k = [p_1^k, p_2^k, \dots, p_n^k]^T$ (k 为常数).

2) 给定向量 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$, 则 $\mathbf{a}$ 的叉乘矩阵定义为: $[\mathbf{a}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$.

1.2 定义及引理

考虑如下系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $g(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为非线性函数. 假设系统(1)的平衡点是原点.

定义1. 若系统(1)的原点是全局渐近稳定的, 且系统(1)的任意解 $x(t, x_0)$ 在某有限时刻到达平衡点, 即 $\mathbf{x}(t, x_0) = 0, \forall t \geq T(x_0)$: (T 是稳定时间函数), 则称系统(1)的原点是全局有限时间稳定的^[30].

定义2. 若系统(1)的原点是全局有限时间稳定的, 且稳定时间函数 $T(x_0)$ 是有界的, 即: $\exists T_{\max} > 0 : T(x_0) \leq T_{\max}, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则称系统(1)的原点是固定时间稳定的^[30].

引理1. 对系统(1), 若存在正定函数 $V(x)$ 使得 $\dot{V}(x) \leq -(\alpha V^p(x) + \beta V^q(x))^k$ ($\alpha, \beta, p, q > 0$, 且 $pk < 1, qk > 1$). 则系统(1)是固定时间稳定的, 且稳定时间 $T(x_0)$ 有界: $T(x_0) \leq \frac{1}{\alpha^k(1-pk)} + \frac{1}{\beta^k(qk-1)}, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ ^[30].

1.3 四足机器人动力学模型

四足机器人的质心位置、速度及加速度分别定义为 $\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}}$, $\ddot{\mathbf{p}}$. 四足机器人的单刚体动力学模型表示为^[4]:

$$m\ddot{\mathbf{p}} = \sum \mathbf{F}_i - m\mathbf{g} + \mathbf{d}_1(t) \quad (2)$$

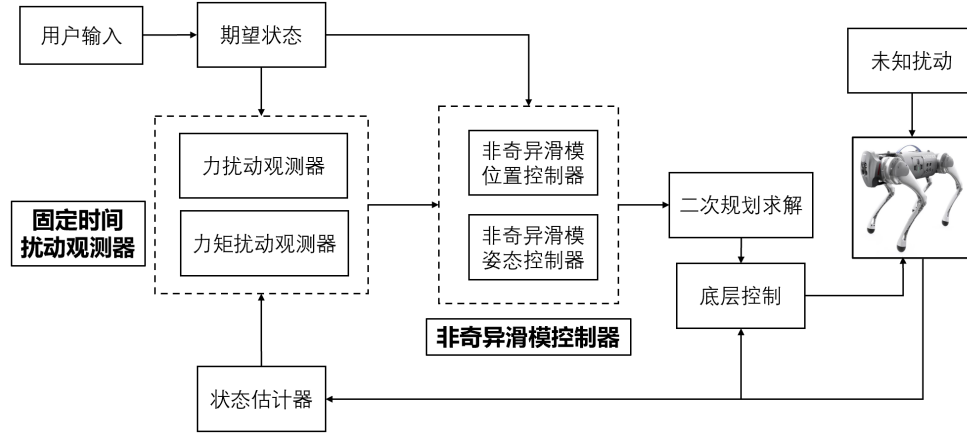


图 1: 四足机器人控制体系结构

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}) = \sum ([\mathbf{r}_i]_{\times} \mathbf{F}_i) + \mathbf{d}_2(t) \quad (3)$$

将式(3)左端展开为 $\frac{d}{dt} (\mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}$, 可得到:

$$\mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}} = -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} + \sum ([\mathbf{r}_i]_{\times} \mathbf{F}_i) + \mathbf{d}_2(t) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^3 (i = 1, 2, 3, 4)$ 为机器人足端 i 的接触力, $m \in \mathbb{R}$ 为四足机器人的本体质量, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ 为重力加速度, $\mathbf{I}_G \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为机器人的惯性张量, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ 为机器人的角速度, $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3 (i = 1, 2, 3, 4)$ 为机器人质心指向足端 i 的坐标向量, $\mathbf{d}_i(t) = [d_{ix}, d_{iy}, d_{iz}]^T \in \mathbb{R}^3 (i = 1, 2)$ 为系统不确定性或未知扰动, 分别表示作用在力方向上的总扰动和作用在力矩方向上的总扰动, $\mathbf{d}_{ij}(t) \in \mathbb{R} (j = x, y, z)$ 分别表示作用在 x, y, z 轴方向上的扰动.

假设1. 扰动 $\mathbf{d}_i(t) \in \mathbb{R}^3 (i = 1, 2)$ 满足如下条件^[26]:

$$\begin{cases} d_{ij}(0) = 0 \\ |\dot{d}_{ij}(t)| \leq C_i, i = 1, 2, j = x, y, z \end{cases} \quad (5)$$

其中, $C_i (i = 1, 2)$ 为正常数.

2 基于固定时间扰动观测器的非奇异滑模控制设计

本文的控制目标是设计反馈控制律, 使得四足机器人质心能够鲁棒地跟踪期望位置与姿态. 为实现这一目标, 本文针对四足机器人的单刚体动力学模型(2) 和(3), 设计了基于固定时间扰动观测器的非奇异滑模位置控制器与姿态控制器. 该控制器结合了固定时间扰动观测器和非奇异滑模控制, 通过对扰动的实时估计和快速补偿, 有效地提高了系统的鲁棒性和控制精度. 本文的四足机器人控制体系结构如图1所示.

2.1 非奇异滑模位置控制设计

定义机器人的期望位置轨迹、速度以及加速度分别为 $\mathbf{p}_d, \dot{\mathbf{p}}_d, \ddot{\mathbf{p}}_d$, 引入位置跟踪误差 $\mathbf{e}_p$ 及速度跟踪误差 $\mathbf{e}_v$:

$$\mathbf{e}_p = \mathbf{p} - \mathbf{p}_d \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_v = \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d \quad (7)$$

对 $\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_v$ 沿时间求导可得:

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \mathbf{e}_v \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_v = \frac{\sum \mathbf{F}_i}{m} - \mathbf{g} + \frac{\mathbf{d}_1(t)}{m} - \ddot{\mathbf{p}}_d \quad (9)$$

2.1.1 非奇异滑模位置控制器

定义固定时间滑模曲面为:

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{e}_v + \lambda_1 (\mu_1 \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_p^2)^{\frac{3}{2}} \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_p) \quad (10)$$

其中, $\lambda_1, \mu_1 > 0$ 为常量, $\mathbf{E}_3 = (1, 1, 1)^T$.

非奇异滑模位置控制器 $\sum \mathbf{F}_i$ 设计为:

$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{g} + m\ddot{\mathbf{p}}_d + m\mathbf{L}_a(t) - \hat{\mathbf{d}}_1(t) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_a(t) = & -u_1 \mathbf{s}_1^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} - u_2 \mathbf{s}_1^{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} - \\ & 3\lambda_1 (\mu_1 \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_p^2)^{\frac{1}{2}} \circ \mathbf{e}_v \circ |\mathbf{e}_p| \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $u_1, u_2, \alpha_1, \beta_1 > 0$ 为常量, 且 $\alpha_1 > \beta_1, \alpha_2 > \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 均为奇数.

设 $\hat{\mathbf{d}}_1(t)$ 为扰动 $\mathbf{d}_1(t)$ 的估计量, 设计为:

$$\hat{\mathbf{d}}_1(t) = -\zeta_1 \int_0^t \text{sgn}(\varepsilon_1(\tau)) d\tau \quad (13)$$

$$\varepsilon_1(t) = \int_0^t \mathbf{T}_1(\tau) + \mathbf{L}_a(\tau) d\tau - \mathbf{e}_v \quad (14)$$

$$\mathbf{T}_1(t) = -a_1 \varepsilon_1(t) \|\varepsilon_1(t)\|^{m_1-1} - b_1 \varepsilon_1(t) \|\varepsilon_1(t)\|^{n_1-1} \quad (15)$$

其中, $\zeta_1 > 4C_1, a_1 > \sqrt{2\zeta_1}, b_1 > 0, 0 < m_1 < 1, n_1 > 1$.

2.1.2 稳定性证明

定义 $\mathbf{d}_1(t)$ 的估计误差:

$$\tilde{\mathbf{d}}_1(t) = \hat{\mathbf{d}}_1(t) - \mathbf{d}_1(t) \quad (16)$$

对 $\tilde{\mathbf{d}}_1(t)$ 求导得到:

$$\dot{\tilde{\mathbf{d}}}_1(t) = -\zeta_1 \text{sgn}(\varepsilon_1(t)) - \dot{\mathbf{d}}_1(t) \quad (17)$$

对式(14)沿时间求导, 并在等式两边同时乘 $\frac{\varepsilon_1^T(t)}{\|\varepsilon_1(t)\|}$ 项, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{d\|\varepsilon_1(t)\|}{dt} &= -a_1\|\varepsilon_1(t)\|^{m_1} - b_1\|\varepsilon_1(t)\|^{n_1} + \\ &\quad \frac{\varepsilon_1^T(t)\tilde{\mathbf{d}}_1(t)}{m\|\varepsilon_1(t)\|} \end{aligned} \quad (18)$$

结合式(5)和式(17), 对 $\varepsilon_1^T(t)\tilde{\mathbf{d}}_1(t)$ 项的正负性进行分析: 当 $\varepsilon_{1i}(t) > 0$ 时, $\tilde{d}_{1i}(t) < 0$, 即, $\varepsilon_{1i}(t)\tilde{d}_{1i}(t) < 0$; 当 $\varepsilon_{1i}(t) < 0$ 时, $\tilde{d}_{1i}(t) < 0$, 即, $\varepsilon_{1i}(t)\tilde{d}_{1i}(t) < 0$; 当 $\varepsilon_{1i}(t) = 0$ 时, $\varepsilon_{1i}(t)\tilde{d}_{1i}(t) = 0$.

进而可得, $\varepsilon_{1i}(t)\tilde{d}_{1i}(t) \leq 0$, 当且仅当 $\varepsilon_{1i}(t) = 0$ 时, $\varepsilon_{1i}(t)\tilde{d}_{1i}(t) = 0$.

定义 $\Gamma_1 = \|\varepsilon_1(t)\|$, 由式(18)可以得到如下不等式:

$$\dot{\Gamma}_1 \leq -a_1\Gamma_1^{m_1} - b_1\Gamma_1^{n_1} \quad (19)$$

选取李雅普诺夫函数 $V_1 = \frac{1}{2}\Gamma_1^2$, 求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \Gamma_1\dot{\Gamma}_1 \leq -a_1\Gamma_1^{m_1+1} - b_1\Gamma_1^{n_1+1} \\ &= -\left(a_1 2^{\frac{m_1+1}{2}} V_1^{\frac{m_1+1}{2}} + b_1 2^{\frac{n_1+1}{2}} V_1^{\frac{n_1+1}{2}}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

根据引理1可得, $\|\varepsilon_1(t)\|$ 经过固定时间 t_1 收敛到0, 且 t_1 满足:

$$t_1 \leq \frac{2^{\frac{1-m_1}{2}}}{a_1(1-m_1)} + \frac{2^{\frac{1-n_1}{2}}}{b_1(n_1-1)} \quad (21)$$

当 $\|\varepsilon_1(t)\|$ 收敛至0, 结合式(5)和式(17), 推得:

$$\left|\tilde{\mathbf{d}}_{1i}(t_1)\right| \leq (\zeta_1 + C_1)t_1, i = x, y, z \quad (22)$$

根据[31]中定理2可得, $\tilde{\mathbf{d}}_1(t)$ 经过固定时间 t_2 收敛至0, 且 t_2 满足:

$$t_2 \leq \frac{\left|\tilde{\mathbf{d}}_{1i}(t_1)\right|}{(\zeta_1 - C_1)\left(1 - \frac{\sqrt{2\zeta_1}}{a_1}\right)} \quad (23)$$

当 $\tilde{\mathbf{d}}_1(t)$ 收敛至0, 对式(10)求导, 并结合式(9)和式(11)得到:

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = -u_1 \mathbf{s}_1^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} - u_2 \mathbf{s}_1^{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} \quad (24)$$

选取李雅普诺夫函数 $V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1$, 求导可得^[32]:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 &= \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 \\
 &= -u_1 \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} - u_2 \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1^{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} \\
 &= -u_1 (\mathbf{s}_1^T)^{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2\beta_1}} \mathbf{s}_1^{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2\beta_1}} - u_2 (\mathbf{s}_1^T)^{\frac{\alpha_2+\beta_2}{2\alpha_2}} \mathbf{s}_1^{\frac{\alpha_2+\beta_2}{2\alpha_2}} \\
 &\leq -u_1 3^{\frac{\beta_1-\alpha_1}{2\beta_1}} (2V_2)^{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2\beta_1}} - u_2 (2V_2)^{\frac{\alpha_2+\beta_2}{2\alpha_2}} \\
 &\leq -u_1 3^{\frac{\beta_1-\alpha_1}{2\beta_1}} 2^{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2\beta_1}} V_2^{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2\beta_1}} - u_2 2^{\frac{\alpha_2+\beta_2}{2\alpha_2}} V_2^{\frac{\alpha_2+\beta_2}{2\alpha_2}}
 \end{aligned} \tag{25}$$

根据引理1可得, V_2 和 s_1 经过固定时间 t_3 收敛至0, 且 t_3 满足:

$$t_3 \leq \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\alpha_1-\beta_1}{2\beta_1}} \beta_1}{u_1 (\alpha_1 - \beta_1)} + \frac{2^{\frac{\alpha_2-\beta_2}{2\alpha_2}} \alpha_2}{u_2 (\alpha_2 - \beta_2)} \tag{26}$$

当 V_2 和 s_1 收敛至0, 由式(10)可得:

$$\mathbf{e}_v = -\lambda_1 (\mu_1 \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_p^2)^{\frac{3}{2}} \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_p) \tag{27}$$

选取李雅普诺夫函数为:

$$V_3 = \frac{1}{3} (\mathbf{e}_p \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_p))^T (\mu_1 \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_p^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{28}$$

对 V_3 两边同时求导可得:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &= \frac{1}{3} \dot{\mathbf{e}}_p^T (\mu_1 \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_p^2)^{-\frac{3}{2}} \circ \\
 &\quad ((\mu_1 \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_p^2) \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_p) - \mathbf{e}_p^2 \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_p)) \\
 &= \frac{1}{3} \mu_1 \dot{\mathbf{e}}_p^T (\mu_1 \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_p^2)^{-\frac{3}{2}} \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_p) \\
 &= -\lambda_1 \mu_1 < 0
 \end{aligned} \tag{29}$$

由此可知, V_3 为递减函数, $V_3 \in [0, 1)$, 且经过固定时间 t_4 , $\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}_v$ 将收敛至0, 其中 t_4 满足:

$$t_4 = \frac{|V_3(0)|}{\lambda_1 \mu_1} \leq \frac{1}{\lambda_1 \mu_1} \tag{30}$$

故 $\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}_v$ 将在固定时间 t_s 内收敛至0, t_s 有上界:

$$t_s \leq t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \tag{31}$$

2.2 非奇异滑模姿态控制设计

定义四足机器人的期望旋转矩阵、角速度以及角加速度分别为 $\mathbf{R}_d$, $\boldsymbol{\omega}_d$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$, 引入方位跟踪误差 $\mathbf{e}_o$ 及角速度跟踪误差 $\mathbf{e}_\omega$:

$$\mathbf{e}_o = \log(\mathbf{R}^T \mathbf{R}_d) \tag{32}$$

$$\mathbf{e}_\omega = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d \quad (33)$$

对 $\mathbf{e}_o$ 和沿时间求导可得:

$$\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{e}_\omega \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_\omega = & \mathbf{I}_G^{-1} \left(\sum ([\mathbf{r}_i]_\times \mathbf{F})_i \right) - \mathbf{I}_G^{-1} ([\boldsymbol{\omega}]_\times \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}) \\ & + \mathbf{I}_G^{-1} \mathbf{d}_2(t) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_d \end{aligned} \quad (35)$$

2.2.1 非奇异滑模姿态控制器

定义固定时间滑模曲面 $\mathbf{s}_2$ 为:

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{e}_\omega + \lambda_2 (\mu_2 \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_o^2)^{\frac{3}{2}} \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_o) \quad (36)$$

其中, $\lambda_2, \mu_2 > 0$ 为常量.

将非奇异滑模姿态控制器 $\sum ([\mathbf{r}_i]_\times \mathbf{F})_i$ 设计为:

$$\sum ([\mathbf{r}_i]_\times \mathbf{F})_i = [\boldsymbol{\omega}]_\times \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{I}_G \mathbf{L}_b(t) - \hat{\mathbf{d}}_2(t) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_b(t) = & -u_3 \mathbf{s}_2^{\frac{\alpha_3}{\beta_3}} - u_4 \mathbf{s}_2^{\frac{\beta_4}{\alpha_4}} - \\ & 3\lambda_2 (\mu_2 \mathbf{E}_3 + \mathbf{e}_o^2)^{\frac{1}{2}} \circ \mathbf{e}_\omega \circ |\mathbf{e}_o| \end{aligned} \quad (38)$$

其中, $u_3, u_4, \alpha_2, \beta_2 > 0$ 为常量, 且 $\alpha_3 > \beta_3$, $\alpha_4 > \beta_4$, $\alpha_3, \alpha_4, \beta_3, \beta_4$ 均为奇数.

设 $\hat{\mathbf{d}}_2(t)$ 为扰动 $\mathbf{d}_2(t)$ 的估计量, 设计为:

$$\hat{\mathbf{d}}_2(t) = -\zeta_2 \int_0^t \text{sgn}(\varepsilon_2(\tau)) d\tau \quad (39)$$

$$\varepsilon_2(t) = \int_0^t \mathbf{T}_2(\tau) + \mathbf{L}_b(\tau) d\tau - \mathbf{e}_\omega \quad (40)$$

$$\mathbf{T}_2(t) = -a_2 \varepsilon_2(t) \|\varepsilon_2(t)\|^{m_2-1} - b_2 \varepsilon_2(t) \|\varepsilon_2(t)\|^{n_2-1} \quad (41)$$

其中, $\zeta_2 > 4C_2$, $a_2 > \sqrt{2\zeta_2}$, $b_2 > 0$, $0 < m_2 < 1$, $n_2 > 1$.

2.2.2 稳定性证明

定义 $\mathbf{d}_2(t)$ 的估计误差:

$$\tilde{\mathbf{d}}_2(t) = \hat{\mathbf{d}}_2(t) - \mathbf{d}_2(t) \quad (42)$$

对式(40)沿时间求导,并在等式两边同时乘 $\frac{\varepsilon_2^T(t)}{\|\varepsilon_2(t)\|}$ 项,可得:

$$\begin{aligned} \frac{d\|\varepsilon_2(t)\|}{dt} &= -a_2\|\varepsilon_2(t)\|^{m_2} - b_2\|\varepsilon_2(t)\|^{n_2} + \\ &\quad \frac{\varepsilon_2^T(t) \mathbf{I}_G^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_2(t)}{\|\varepsilon_2(t)\|} \end{aligned} \quad (43)$$

由文[33]可知,正定实矩阵 $\mathbf{I}_G^{-1}$ 满足不等式 $z_1 \mathbf{I}_{3 \times 3} \leq \mathbf{I}_G^{-1} \leq z_2 \mathbf{I}_{3 \times 3}$,其中 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 是三阶单位矩阵,正常数 z_1, z_2 分别为 $\mathbf{I}_G^{-1}$ 的最小和最大特征值.令 $\delta = \varepsilon_2^T(t) \mathbf{I}_G^{-1}$,可得, $\text{sgn}(\delta) = \text{sgn}(\varepsilon_2^T(t))$.

结合式(5)和式(42),对 $\varepsilon_2^T(t) \mathbf{I}_G^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_2(t)$ 项的正负性进行分析:当 $\varepsilon_{2i}(t) > 0$ 时, $\delta_i > 0$, $\tilde{d}_{2i}(t) < 0$,即, $\delta_i \tilde{d}_{2i}(t) < 0$;当 $\varepsilon_{2i}(t) < 0$ 时, $\delta_i < 0$, $\tilde{d}_{2i}(t) > 0$,即, $\delta_i \tilde{d}_{2i}(t) < 0$;当 $\varepsilon_{2i}(t) = 0$ 时, $\delta_i \tilde{d}_{2i}(t) = 0$.

进而可得, $\varepsilon_2^T(t) \mathbf{I}_G^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_2(t) \leq 0$,当且仅当 $\varepsilon_{2i}(t) = 0$ 时, $\varepsilon_2^T(t) \mathbf{I}_G^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_2(t) = 0$.

定义 $\Gamma_2 = \|\varepsilon_2(t)\|$,可以得到如下不等式:

$$\dot{\Gamma}_2 \leq -a_2 \Gamma_2^{m_2} - b_2 \Gamma_2^{n_2} \quad (44)$$

类似于式(20)-式(30),可证得 $\tilde{d}_2(t)$ 在固定时间 t_5 内收敛至0,且 t_5 的上界满足:

$$t_5 = t_{51} + t_{52} \quad (45)$$

$$t_{51} \leq \frac{2^{\frac{1-m_2}{2}}}{a_2(1-m_2)} + \frac{2^{\frac{1-n_2}{2}}}{b_2(n_2-1)} \quad (46)$$

$$t_{52} \leq \frac{(\zeta_2 + C_2)t_{51}}{(\zeta_2 - C_2)\left(1 - \frac{\sqrt{2\zeta_2}}{a_2}\right)} \quad (47)$$

进而可得, $\mathbf{e}_o$ 和 $\mathbf{e}_\omega$ 在固定时间 t_r 内收敛至0,且 t_r 满足:

$$t_r \leq t_5 + t_6 + t_7 \quad (48)$$

$$t_6 \leq \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\alpha_3 - \beta_3}{2\beta_3}} \beta_3}{u_3(\alpha_3 - \beta_3)} + \frac{2^{\frac{\alpha_4 - \beta_4}{2\alpha_4}} \alpha_4}{u_4(\alpha_4 - \beta_4)} \quad (49)$$

$$t_4 \leq \frac{1}{\lambda_2 \mu_2} \quad (50)$$

3 带约束的二次凸优化

考虑四足机器人足端力受摩擦锥约束,结合上述得到的扰动估计量 $\hat{\mathbf{d}}_1(t)$ 和 $\hat{\mathbf{d}}_2(t)$,本文采用二次规划方法求解最优足端力 $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$),进而得到关节力矩 $\boldsymbol{\tau}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$),实现四足机器人的稳定运动.

3.1 足端力摩擦锥约束

在运动过程中, 四足机器人各足端与地面之间的作用力, 即足端力 $\mathbf{F}_i = [f_{ix}, f_{iy}, f_{iz}]^T$ 满足摩擦锥约束式^[29], 可得:

$$\begin{cases} -\mu f_{iz} < f_{ix} < \mu f_{iz} \\ -\mu f_{iz} < f_{iy} < \mu f_{iz} \\ 0 < f_{iz} \\ D_i F_i = 0 \end{cases} \quad (51)$$

其中, μ_z 为地面与四足机器人足端之间的静摩擦系数. D_i 为足端触地选择矩阵, 若某足端触地, 则值为1; 否则, 值为0.

3.2 二次规划求解机器人动力学方程

四足机器人单刚体动力学模型(2)和(3)可写为如下线性方程形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{F} - \mathbf{B} = 0 \quad (52)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ [r_1]_{\times} & [r_2]_{\times} & [r_3]_{\times} & [r_4]_{\times} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_i \\ \sum ([r_i]_{\times} \mathbf{F})_i \end{bmatrix} \quad (54)$$

定义代价函数 J 为:

$$\begin{aligned} \min J = & (\mathbf{A}\mathbf{F} - \mathbf{B})^T \mathbf{S} (\mathbf{A}\mathbf{F} - \mathbf{B}) + \mathbf{F}^T \sigma \mathbf{W} \mathbf{F} + \\ & (\mathbf{F} - \mathbf{F}_o)^T \varsigma \mathbf{U} (\mathbf{F} - \mathbf{F}_o) \end{aligned} \quad (55)$$

其中, $\mathbf{S}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{U}$ 为权重矩阵, σ , ς 为权重矩阵的系数, $\mathbf{F}_o$ 为前一时刻计算得到的足端力. 将式(55)化简可得:

$$\begin{aligned} \min J' = & \frac{1}{2} \mathbf{F}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A} + \sigma \mathbf{W} + \varsigma \mathbf{U}) \mathbf{F} + \\ & (-\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} - \mathbf{F}_o \varsigma \mathbf{U}) \mathbf{F} \end{aligned} \quad (56)$$

结合式(52), 式(53), 式(54)和式(56), 可得到带约束的优化方程. 用二次规划方法求解可得最优足端力 $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 同时, 使用单腿静力学可近似得到各个关节的力矩 τ_i :

$$\tau_i = -\mathbf{J}_i^T \mathbf{F}_i \quad (57)$$

其中, $\mathbf{J}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$)是对应腿的雅可比矩阵. 此时, 四足机器人的伺服电机使根据 τ_i ($i = 1, 2, 3, 4$)控制四足机器人的关节运动, 进而实现控制目的.

表 1: 控制器参数

参数	数值	参数	数值
a_1	3.0	a_2	3.0
b_1	0.5	b_2	0.5
ζ_1	4.0	ζ_2	4.0
m_1	0.5	m_2	0.5
n_1	2.0	n_2	2.0
λ_1	2.0	μ_1	2.0
u_1	2.0	u_2	2.0
λ_2	0.3	μ_2	0.3
u_3	2.0	u_4	2.0
α_1	5.0	β_1	5.0
α_3	5.0	β_3	5.0
β_2	3.0	α_2	3.0
β_4	3.0	α_4	3.0



图 2: 仿真实验环境

4 实验

为充分验证本文所设计的FTDO-NSMC策略的有效性, 选取宇树四足机器人GO1作为实验对象, 展开全面的仿真与实机实验评估. 实验设定的控制任务为: 在未知扰动条件中, 四足机器人平稳地跟踪用户输入的位置与姿态指令, 以此验证所提FTDO-NSMC策略能否精准观测四足机器人运动过程中的未知扰动, 并迅速进行补偿, 从而提升跟踪误差精度.

在实验过程中, 通过在四足机器人背部篮筐放置不同重量且未固定的重物, 模拟机器人受到外部扰动的情况. 重物位置的改变会对机身重心产生影响, 同时, 重物自身重力以及运动时因晃动产生的瞬时冲击力等, 均被视作运动过程中的外部扰动. 为准确评估FTDO-NSMC 策略对扰动估计的精准度, 在重力方向上, 以 x (kg) 负载作用下该方向的扰动力估计值与无负载时的扰动力估计值之差作为评判标准. 四足机器人的控制器参数详见表1, 仿真实验及实机实验的环境如图2, 图3所示.

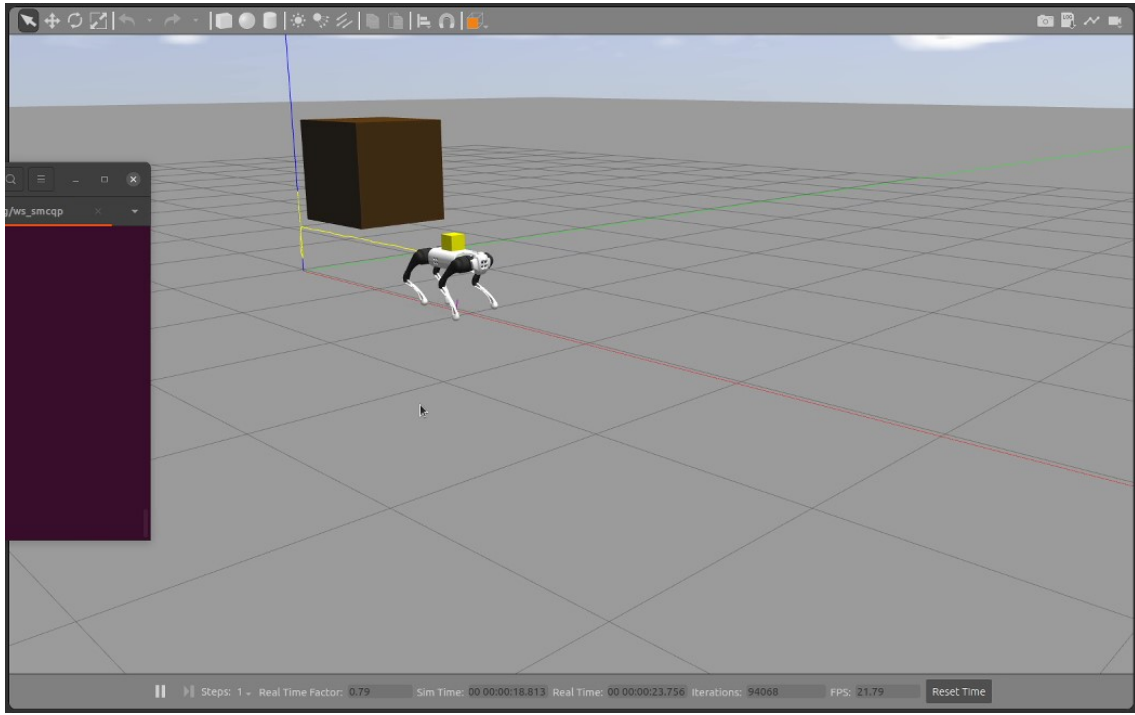


图 3: 实机实验环境

4.1 仿真实验

首先, 在Gazebo仿真平台中利用unitree_ros软件包中提供的宇树四足机器人GO1仿真模型进行仿真实验. 为了进一步验证FTDO-NSMC策略的有效性和可行性, 在Gazebo中基于同一仿真模型、同一仿真场景与 L_1 AC策略^[15]和BC策略^[29]进行对比实验.

设定四足机器人运动的期望机身高度为0.32 (m), 直行实验的期望机身速度为0.4 (m/s), 旋转实验的期望机身角速度为0.4 (rad/s), 负载重量依次为0 (kg), 1 (kg), 2 (kg), 3 (kg), 分别进行直行和旋转实验. 实验结果如图4-图8所示.

图4-图8展示了仿真实验中不同负载重量下不同控制策略的跟踪效果. 从图4可以看出, 当负载为0 (kg) 时, 三种策略均能稳定地跟踪期望机身状态, 相较于 L_1 AC 策略和BC策略, FTDO-NSMC 策略通过固定时间扰动观测器对系统不确定性进行了补偿, 显著提升了对期望机身高度的跟踪精度. 从图5可知, 当负载为1 (kg) 时, FTDO-NSMC策略在跟踪期望状态时依然保持着良好的稳定性和准确性, 而 L_1 AC策略在跟踪期望机身高度时, 稳定性和准确性有所下降. 从图6、图7可以看出, 当负载为2 (kg)、3 (kg) 时, L_1 AC策略的期望机身高度跟踪曲线波动较大, 准确性和稳定性显著降低, 而FTDO-NSMC 策略在跟踪期望机身高度时表现出了更优的稳定性和准确性. 可以看出, 随着负载重量的升高, FTDO-NSMC策略对期望机身高度跟踪的稳定性和准确性始终优于 L_1 AC策略和BC策略, 展现了优越跟踪能力.

图8展示了仿真实验中负载重力值与FTDO-NSMC 策略对扰动力的净估计值的对比. 可以看出, 在运动过程中, FTDO-NSMC策略始终能够准确且快速地对扰动进行估计.

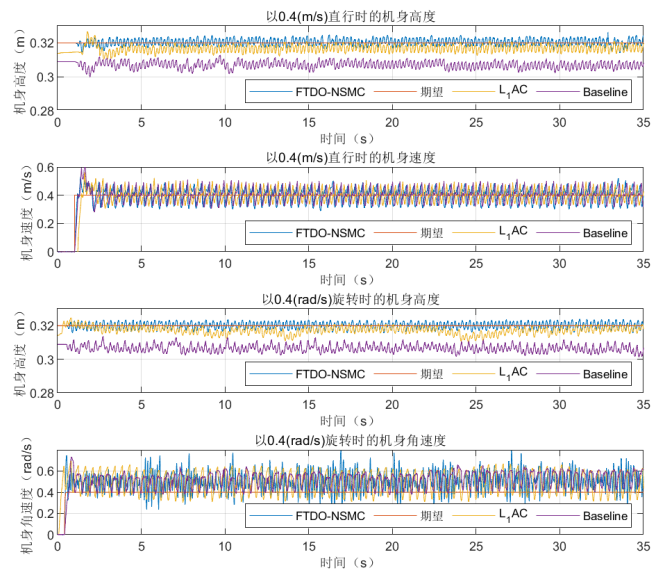


图 4: 负载为0(kg)的四足机器人仿真实验结果

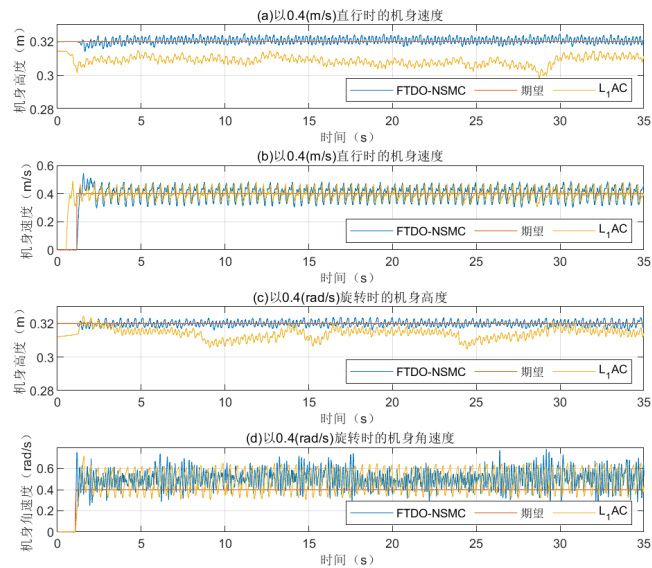


图 5: 负载为1(kg)的四足机器人仿真实验结果

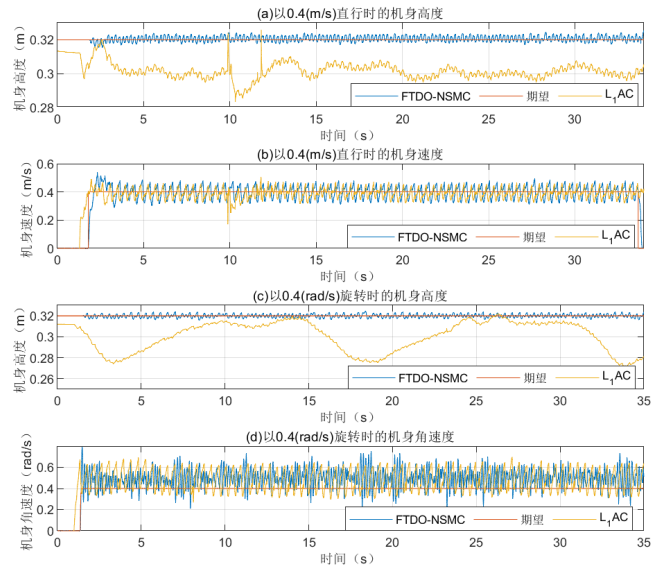


图 6: 负载为2(kg)的四足机器人仿真实验结果

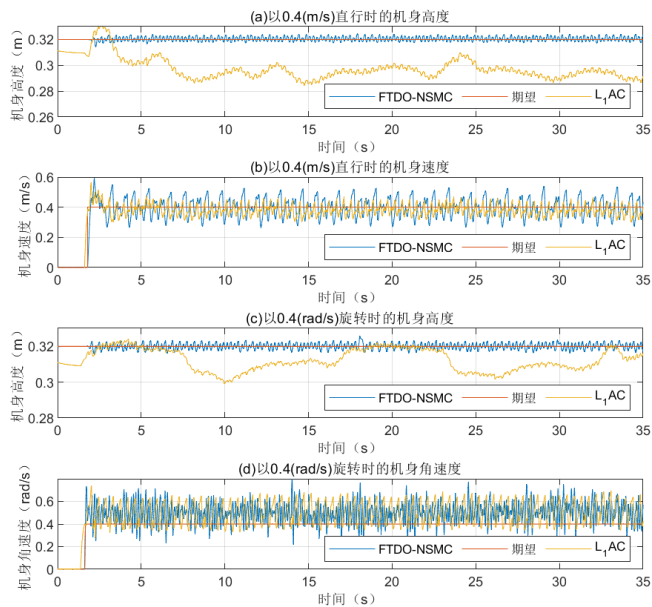


图 7: 负载为3(kg)的四足机器人仿真实验结果

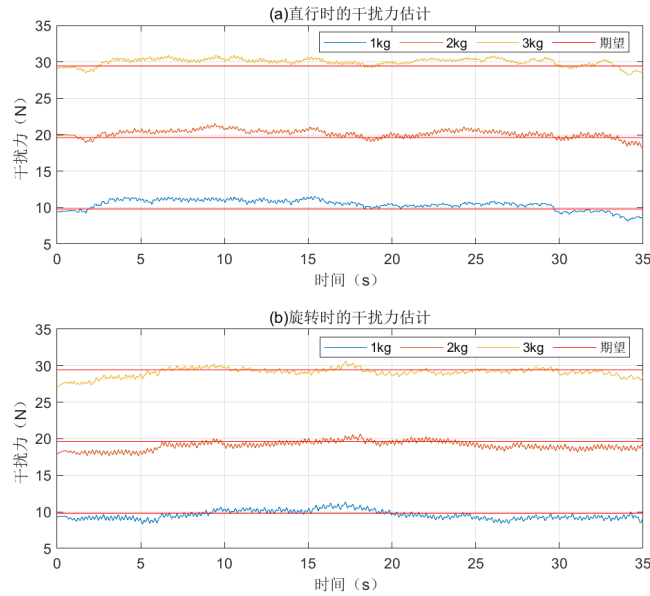


图 8: 仿真实验中对干扰力的估计结果

4.2 实机实验

为了进一步验证FTDO-NSMC策略的有效性和可行性, 采用宇树四足机器人GO1作为实验对象进行实机实验, 并基于同一对象、同一场景与 L_1AC 策略^[15]和BC策略^[29]进行对比实验.

设定四足机器人运动的期望机身高度为0.32m, 直行实验的期望机身速度为0.4 (m/s), 旋转实验的期望机身角速度为0.4 (rad/s), 负载重量依次为0 (kg), 1 (kg), 2 (kg), 3 (kg), 分别进行直行和旋转实验. 实验结果如图9- 图13所示.

图9-图13展示了实机实验中不同负载重量下不同控制策略的跟踪效果. 从图9可以看出, 当负载为0 (kg) 时, 三种策略均能稳定地跟踪期望机身状态, FTDO-NSMC策略对系统模型误差进行了更精确的补偿, 与 L_1AC 策略和BC策略相比, 在跟踪期望机身高度时具有更高的准确性. 从图10、图11可以看出, 当负载为1 (kg)、2 (kg) 时, FTDO-NSMC策略在跟踪期望状态时依然保持着良好的稳定性和准确性, 而 L_1AC 策略在跟踪期望机身高度及速度时, 准确性有所下降. 从图12可以看出, 当负载为3 (kg) 时, FTDO-NSMC策略在跟踪期望机身高度及速度时表现出了更佳稳定性和准确性, 而 L_1AC 策略在跟踪期望机身高度及速度时, 准确性明显降低. 可以看出, 随着负载重量的升高, FTDO-NSMC策略对期望机身高度及速度跟踪的稳定性与准确性始终优于 L_1AC 策略和BC策略, 展现了出色的跟踪能力.

图13展示了实机实验中负载重力值与FTDO-NSMC策略对扰动力的净估计值的对比. 可以看出, 在运动过程中, FTDO-NSMC策略始终保持着较为稳定的扰动估计能力.

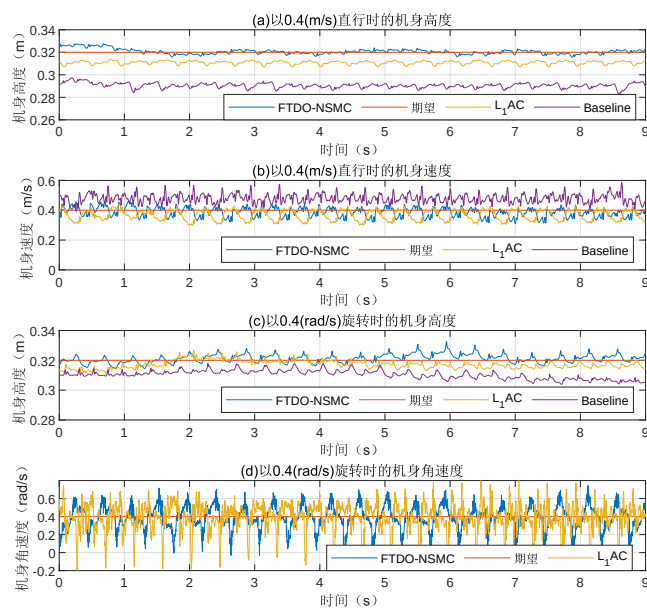


图 9: 负载为0(kg)的四足机器人实机实验结果

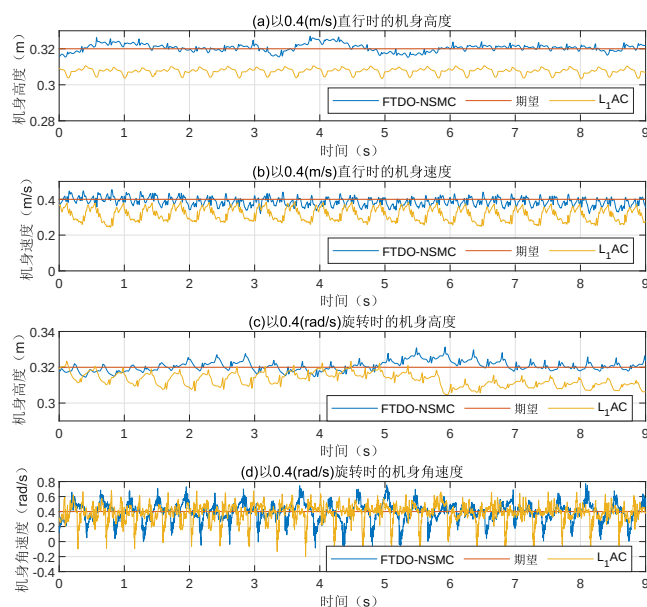


图 10: 负载为1(kg)的四足机器人实机实验结果

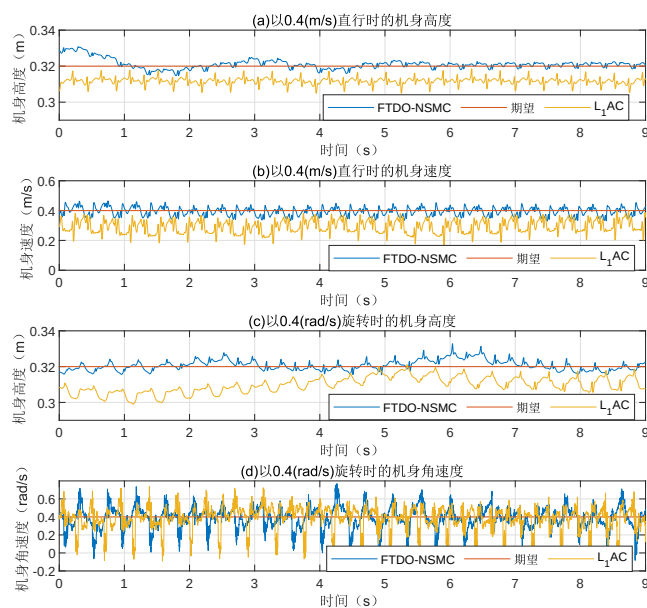


图 11: 负载为2(kg)的四足机器人实机实验结果

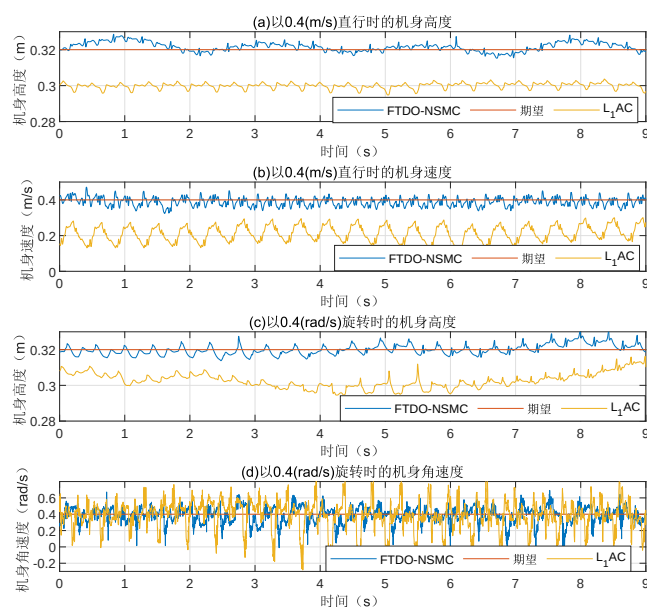


图 12: 负载为3(kg)的四足机器人实机实验结果

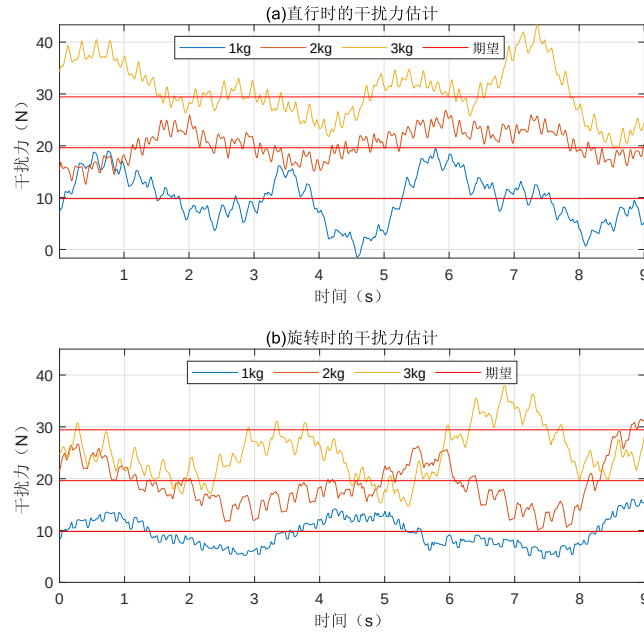


图 13: 实机实验中对干扰力的估计结果

5 结论

本文探讨了未知扰动环境下四足机器人的运动控制问题. 采用固定时间扰动观测器对机器人平动与转动方向的未知扰动进行快速估计, 提出了一种非奇异滑模跟踪控制框架. 同时, 考虑到四足机器人足端力的摩擦锥约束, 运用二次规划方法求解得到最优足端力. 最后, 通过仿真和实机实验验证了该策略的有效性与优势.

参考文献 (References)

- [1] Biswal P, Mohanty P K. Development of quadruped walking robots: A review [J]. Ain Shams Engineering Journal, 2021, 12(2): 2017 – 2031.
- [2] Fan Y, Pei Z, Wang C, et al. A review of quadruped robots: structure, control, and autonomous motion [J]. Advanced Intelligent Systems, 2024, 6(6): 2300783.
- [3] SEMINI C. HyQ-design and development of a hydraulically actuated quadruped robot [D]. Italy: University of Genoa, 2010.
- [4] Di Carlo J, Wensing P M, Katz B, et al. Dynamic locomotion in the mit cheetah 3 through convex model-predictive control [C]. 2018 IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems (IROS). IEEE, 2018: 1 – 9.

- [5] Baird C, Nokleby S. Autonomous firefighting using a quadruped robot [J]. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 2024, 48(4): 605 – 616.
- [6] Perdoch M, Bradley D M, Chang J K, et al. Leader tracking for a walking logistics robot [C]. 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). IEEE, 2015: 2994 – 3001.
- [7] Ulloa C C, Domínguez D, Barrientos A, et al. Design and mixed-reality teleoperation of a quadruped-manipulator robot for sar tasks [C]. Climbing and Walking Robots Conference. Cham: Springer International Publishing, 2022: 181 – 194.
- [8] Ulloa C C, del Cerro J, Barrientos A. Mixed-reality for quadruped-robotic guidance in SAR tasks [J]. Journal of Computational Design and Engineering, 2023, 10(4): 1479 – 1489.
- [9] Hutter M, Gehring C, Bloesch M, et al. Walking and running with StarlETH [C]. The 6th international symposium on adaptive motion of animals and machines (AMAM). 2013.
- [10] Hutter M, Gehring C, Bloesch M, et al. StarlETH: A compliant quadrupedal robot for fast, efficient, and versatile locomotion [J]. Adaptive mobile robotics, 2012: 483 – 490.
- [11] Hutter M. StarlETH & Co.: Design and control of legged robots with compliant actuation [D]. ETH Zurich, 2013.
- [12] PANDALA A, FAWCETT R T, ROSOLIA U, et al. Robust predictive control for quadrupedal locomotion: Learning to close the gap between reduced-and full-order models [J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2022, 7(3): 6622 – 6629.
- [13] Sutyasadi P, Parnichkun M. Gait tracking control of quadruped robot using differential evolution based structure specified mixed sensitivity h_{∞} robust control [J]. Journal of Control Science and Engineering, 2016, 2016(1): 8760215.
- [14] Kazemi H, Majd V J, Moghaddam M M. Modeling and robust backstepping control of an underactuated quadruped robot in bounding motion [J]. Robotica, 2013, 31(3): 423 – 439.
- [15] SOMBOLESTAN M, CHEN Y, NGUYEN Q. Adaptive force-based control for legged robots [C]. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2021: 7440 – 7447.
- [16] JIN B, YE S, SU J, et al. Unknown payload adaptive control for quadruped locomotion with proprioceptive linear legs [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2022, 27(4): 1891 – 1899.
- [17] LEE J, HWANGBO J, WELLHAUSEN L, et al. Learning quadrupedal locomotion over challenging terrain [J]. Science Robotics, 2020, 5(47): eabc5986.

- [18] PENG X B, COUMANS E, ZHANG T, et al. Learning agile robotic locomotion skills by imitating animals [J]. 2020.
- [19] SUN Y, UBELLACKER W L, MA W L, et al. Online learning of unknown dynamics for model-based controllers in legged locomotion [J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2021, 6(4): 8442 – 8449.
- [20] MORLANDO V, TEIMOOORZADEH A, RUGGIERO F. Whole-body control with disturbance rejection through a momentum-based observer for quadruped robots [J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 164: 104412.
- [21] MORLANDO V, RUGGIERO F. Disturbance rejection for legged robots through a hybrid observer [C]. 0th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2022: 743 – 748.
- [22] FARID Y, MAJD V J, EHSANI-SERESHT A. Observer-based robust adaptive force-position controller design for quadruped robots with actuator faults [J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2018, 32(10): 1453 – 1472.
- [23] Haimo V T. Finite time controllers [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1986, 24(4): 760 – 770.
- [24] Niu S, Wang J, Zhao J. High-performance foot trajectory tracking control of hydraulic legged robots based on fixed-time disturbance observers [J]. Industrial Robot: the international journal of robotics research and application, 2025, 52(1): 144 – 155.
- [25] Liu S, Zhou S, Shi L, et al. Smooth and safe stop: Fixed-time fault tolerant control for heavy legged robot with active identification on tolerance capability [J]. ISA transactions, 2025, 157: 107 – 123.
- [26] CHENG X, LIU Z W, HOU H, et al. Disturbance observer-based nonsingular fixed-time sliding mode tracking control for a quadcopter [J]. Science China Information Sciences, 2022, 65(9): 192 – 202.
- [27] Zuo Z. Non-singular fixed-time terminal sliding mode control of non-linear systems [J]. IET control theory & applications, 2015, 9(4): 545 – 552.
- [28] Huang J, Ri S, Fukuda T, et al. A disturbance observer based sliding mode control for a class of underactuated robotic system with mismatched uncertainties [J]. IEEE Trans. Autom. Control, 2019, 64(6): 2480 – 2487.
- [29] Focchi M, Del Prete A, Havoutis I, et al. High-slope terrain locomotion for torque-controlled quadruped robots [J]. Autonomous Robots, 2017, 41: 259 – 272.

- [30] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems [J]. IEEE transactions on Automatic Control, 2011, 57(8): 2106-2110.
- [31] Basin M, Bharath Panathula C, Shtessel Y. Multivariable continuous fixed-time second-order sliding mode control: design and convergence time estimation [J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(8): 1104 – 1111.
- [32] Zuo Z. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks [J]. Automatica, 2015, 54: 305 – 309.
- [33] Spong M W. An historical perspective on the control of robotic manipulators [J]. Annual review of control, robotics, and autonomous systems, 2022, 5(1): 1 – 31.